Ao infinito e além:
do teorema de Ramsey aos espaços combinatórios

Christina Brech

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo

Semana da Pura
Abril de 2024

Parte 1

Introdução

Sabemos que, se distribuirmos 10 pombos em 9 casas, pelo menos uma casa será habitada por pelo menos 2 pombos.

Introdução

Sabemos que, se distribuirmos 10 pombos em 9 casas, pelo menos uma casa será habitada por pelo menos 2 pombos.

Suponhamos que temos n casas. Quantos pombos precisamos distribuir entre elas de forma a garantir que pelo menos uma casa tenha pelo menos $k + 1$ pombos?

Introdução

Sabemos que, se distribuirmos 10 pombos em 9 casas, pelo menos uma casa será habitada por pelo menos 2 pombos.

Suponhamos que temos n casas. Quantos pombos precisamos distribuir entre elas de forma a garantir que pelo menos uma casa tenha pelo menos $k+1$ pombos?

Você consegue colorir todas as arestas dos seguintes grafos com duas cores de forma que todo triângulo (com vértices nos pontos azuis) tenha arestas de ambas as cores?

Introdução

Podemos formular o princípio da casa dos pombos com a seguinte linguagem: para toda função $c : [n \cdot k + 1] \to [n]$, existe $X \subseteq [n \cdot k + 1]$ com $k + 1$ elementos tal que $c \upharpoonright X$ é constante.

Introdução

Podemos formular o princípio da casa dos pombos com a seguinte linguagem: para toda função $c : [n \cdot k + 1] \to [n]$, existe $X \subseteq [n \cdot k + 1]$ com $k + 1$ elementos tal que $c \restriction X$ é constante.

A resposta ao problema sobre o grafo com 5 vértices pode ser formulada como: existe uma função $c : [5]^2 \to [2]$, para todo $X \subseteq [5]$ com 3 elementos, $c \restriction [X]^2$ não é constante.

Introdução

Podemos formular o princípio da casa dos pombos com a seguinte linguagem: para toda função $c : [n \cdot k + 1] \to [n]$, existe $X \subseteq [n \cdot k + 1]$ com $k + 1$ elementos tal que $c \restriction X$ é constante.

A resposta ao problema sobre o grafo com 5 vértices pode ser formulada como: existe uma função $c : [5]^2 \to [2]$, para todo $X \subseteq [5]$ com 3 elementos, $c \restriction [X]^2$ não é constante.

Já a resposta ao problema sobre o grafo com 6 vértices pode ser formulada como: para toda função $c : [6]^2 \to [2]$, existe $X \subseteq [6]$ com 3 elementos tal que $c \restriction [X]^2$ é constante.

O teorema de Ramsey

Frank Plumpton Ramsey
1903-1930

O teorema de Ramsey

Theorem (Teorema de Ramsey, versão finita)

Sejam m, k *números naturais positivos (com* $m \leq k$*) e* $n \geq 2$. *Existe um número natural positivo* $r = r(m, n, k)$ *(*$r \geq m$*) tal que para toda função* $c : [r]^m \to [n]$, *existe* $X \subseteq [r]$ *com* k *elementos tal que* $c \restriction [X]^m$ *é constante.*

O teorema de Ramsey

Theorem (Teorema de Ramsey, versão finita)

Sejam m, k números naturais positivos (com $m \leq k$) e $n \geq 2$. Existe um número natural positivo $r = r(m, n, k)$ ($r \geq m$) tal que para toda função $c : [r]^m \to [n]$, existe $X \subseteq [r]$ com k elementos tal que $c \restriction [X]^m$ é constante.

É fácil ver que $r(1, n, k+1) = n \cdot k + 1$.

O teorema de Ramsey

Theorem (Teorema de Ramsey, versão finita)

Sejam m, k números naturais positivos (com $m \leq k$) e $n \geq 2$. Existe um número natural positivo $r = r(m, n, k)$ ($r \geq m$) tal que para toda função $c : [r]^m \to [n]$, existe $X \subseteq [r]$ com k elementos tal que $c \restriction [X]^m$ é constante.

É fácil ver que $r(1, n, k+1) = n \cdot k + 1$.

Vimos que $r(2, 2, 3) = 6$

O teorema de Ramsey

Theorem (Teorema de Ramsey, versão finita)

Sejam m, k números naturais positivos (com $m \leq k$) e $n \geq 2$. Existe um número natural positivo $r = r(m, n, k)$ ($r \geq m$) tal que para toda função $c : [r]^m \to [n]$, existe $X \subseteq [r]$ com k elementos tal que $c \restriction [X]^m$ é constante.

É fácil ver que $r(1, n, k+1) = n \cdot k + 1$.

Vimos que $r(2, 2, 3) = 6$

Sabe-se que $r(2, 2, 4) = 18$; $43 \leq r(2, 2, 5) \leq 48$ e $102 \leq r(2, 2, 6) \leq 165$.

O teorema de Ramsey

Theorem (Teorema de Ramsey, versão finita)

Sejam m, k números naturais positivos (com $m \leq k$) e $n \geq 2$. Existe um número natural positivo $r = r(m, n, k)$ $(r \geq m)$ tal que para toda função $c : [r]^m \to [n]$, existe $X \subseteq [r]$ com k elementos tal que $c \restriction [X]^m$ é constante.

É fácil ver que $r(1, n, k+1) = n \cdot k + 1$.

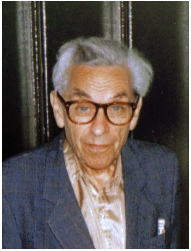
Vimos que $r(2, 2, 3) = 6$

Sabe-se que $r(2, 2, 4) = 18$; $43 \leq r(2, 2, 5) \leq 48$ e $102 \leq r(2, 2, 6) \leq 165$.

Notação: $r \to (k)^m_n$

O teorema de Ramsey

Imagine que uma força alienígena invada a Terra e ameace destruí-la em um ano a menos que nós, seres humanos, determinemos o valor de $r(2,2,5)$*. Nós poderíamos recrutar os melhores cérebros do mundo e os computadores mais rápidos e, dentro de um ano, provavelmente calcular esse valor. Porém, se os alienígenas pedissem o valor de* $r(2,2,6)$*, não teríamos outra opção que não fosse lançar um ataque preventivo.*



Paul Erdös
1913-1996

O teorema de Ramsey

Theorem (Teorema de Ramsey, versão infinita)

Seja m um número natural positivo, $n \geq 2$ e X um conjunto infinito. Então para toda função $c : [X]^m \to [n]$, existe $Y \subseteq X$ infinito tal que $c \restriction [Y]^m$ é constante.

O teorema de Ramsey

Theorem (Teorema de Ramsey, versão infinita)

Seja m um número natural positivo, $n \geq 2$ e X um conjunto infinito. Então para toda função $c : [X]^m \to [n]$, existe $Y \subseteq X$ infinito tal que $c \upharpoonright [Y]^m$ é constante.

O teorema de Ramsey depende apenas da cardinalidade do conjunto X, e não de quem é o conjunto X.

O teorema de Ramsey

Theorem (Teorema de Ramsey, versão infinita)

Seja m um número natural positivo, $n \geq 2$ e X um conjunto infinito. Então para toda função $c : [X]^m \to [n]$, existe $Y \subseteq X$ infinito tal que $c \upharpoonright [Y]^m$ é constante.

O teorema de Ramsey depende apenas da cardinalidade do conjunto X, e não de quem é o conjunto X.

Notação: $\omega \to (\omega)^m_n$

Falhas do teorema de Ramsey

Example

Existe uma função $c : [\mathbb{N}]^{<\infty} \to [2]$ tal que, para qualquer $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito, $c \restriction [X]^{<\infty}$ não é constante.

Falhas do teorema de Ramsey

Example

Existe uma função $c : [\mathbb{N}]^{<\infty} \to [2]$ tal que, para qualquer $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito, $c \restriction [X]^{<\infty}$ não é constante.

Example

Existe uma função $c : [\mathbb{N}]^{<\infty} \to [2]$ tal que, para qualquer $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $c \restriction [X]^{m}$ não é constante.

Falhas do teorema de Ramsey

Example

Existe uma função $c : [\mathbb{N}]^{<\infty} \to [2]$ tal que, para qualquer $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito, $c \restriction [X]^{<\infty}$ não é constante.

Example

Existe uma função $c : [\mathbb{N}]^{<\infty} \to [2]$ tal que, para qualquer $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $c \restriction [X]^m$ não é constante.

Example

Existe uma função $c : [[0,1]]^2 \to \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $X \subseteq [0,1]$, $|X| \geq 3$, $c \restriction [X]^2$ não é constante.

Falhas do teorema de Ramsey

Example

Existe uma função $c : [\mathbb{N}]^{<\infty} \to [2]$ tal que, para qualquer $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito, $c \upharpoonright [X]^{<\infty}$ não é constante.

Example

Existe uma função $c : [\mathbb{N}]^{<\infty} \to [2]$ tal que, para qualquer $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $c \upharpoonright [X]^m$ não é constante.

Example

Existe uma função $c : [[0,1]]^2 \to \mathbb{N}$ tal que, para qualquer $X \subseteq [0,1]$, $|X| \geq 3$, $c \upharpoonright [X]^2$ não é constante.

Example (Sierpiński, 1933)

Existe uma função $c : [\mathbb{R}]^2 \to [2]$ tal que, para qualquer $X \subseteq \mathbb{R}$ não enumerável, $c \upharpoonright [X]^2$ não é constante.

Ao infinito e além

Buzz Lightyear

Alguns cardinais grandes

Um cardinal (não-enumerável) κ é dito:

- *fracamento compacto se toda coloração $c : [\kappa]^2 \to [2]$ possui um subconjunto monocromático de cardinalidade κ.*

Alguns cardinais grandes

Um cardinal (não-enumerável) κ é dito:

- *fracamento compacto se toda coloração c* : $[\kappa]^2 \to [2]$ *possui um subconjunto monocromático de cardinalidade* κ.
- *de Ramsey se toda coloração c* : $[\kappa]^{<\infty} \to [2]$ *possui um subconjunto homogêneo de cardinalidade* κ.
- *de α-Erdös se toda coloração c* : $[\kappa]^{<\infty} \to [2]$ *possui um subconjunto homogêneo de tipo de ordem* α.

Alguns cardinais grandes

Um cardinal (não-enumerável) κ é dito:

- *fracamento compacto se toda coloração $c : [\kappa]^2 \to [2]$ possui um subconjunto monocromático de cardinalidade κ.*
- *de Ramsey se toda coloração $c : [\kappa]^{<\infty} \to [2]$ possui um subconjunto homogêneo de cardinalidade κ.*
- *de α-Erdös se toda coloração $c : [\kappa]^{<\infty} \to [2]$ possui um subconjunto homogêneo de tipo de ordem α.*
- *de ω-Erdös se toda coloração $c : [\kappa]^{<\infty} \to [2]$ possui um subconjunto homogêneo infinito.*

Parte 2

O teorema de Ramsey

Theorem (Teorema de Ramsey, versão infinita)

Seja m um número natural positivo, $n \geq 2$ e X um conjunto infinito. Então para toda função $c : [X]^m \to [n]$, existe $Y \subseteq X$ infinito tal que $c \restriction [Y]^m$ é constante.

O teorema de Ramsey

Theorem (Teorema de Ramsey, versão infinita)

Seja m um número natural positivo, $n \geq 2$ e X um conjunto infinito. Então para toda função $c : [X]^m \to [n]$, existe $Y \subseteq X$ infinito tal que $c \restriction [Y]^m$ é constante.

Example

Existe uma função $c : [\mathbb{N}]^{<\omega} \to [2]$ tal que, para qualquer $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $c \restriction [X]^m$ não é constante.

O teorema de Ramsey

Theorem (Teorema de Ramsey, versão infinita)

Seja m um número natural positivo, $n \geq 2$ e X um conjunto infinito. Então para toda função $c : [X]^m \to [n]$, existe $Y \subseteq X$ infinito tal que $c \restriction [Y]^m$ é constante.

Example

Existe uma função $c : [\mathbb{N}]^{<\omega} \to [2]$ tal que, para qualquer $X \subseteq \mathbb{N}$ infinito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $c \restriction [X]^m$ não é constante.

Um cardinal (não-enumerável) κ é dito de ω-Erdös se toda coloração $c : [\kappa]^{<\omega} \to [2]$ possui um subconjunto homogêneo infinito.

Famílias combinatórias

A família de Schreier é o conjunto

$$\mathcal{S} = \{F \in [\omega]^{<\omega} : \quad |F| \leq \min F + 1\}$$

que determina a coloração que "testemunha" que ω não é ω-Erdös.

Famílias combinatórias

A família de Schreier é o conjunto

$$\mathcal{S} = \{F \in [\omega]^{<\omega} : \quad |F| \leq \min F + 1\}$$

que determina a coloração que "testemunha" que ω não é ω-Erdös.

Example (Cubos)

A família $[\kappa]^{\leq n}$ é hereditária e compacta, mas não é grande.

Example

A família $[\kappa]^{<\omega}$ é hereditária e grande, mas não é compacta.

Lemma

Seja $\mathcal{F}$ uma família em κ.

Lemma

Seja $\mathcal{F}$ uma família em κ.

- *$\mathcal{F}$ é compacta sse toda sequência em $\mathcal{F}$ possui uma subsequência que forma um Δ-sistema com raiz em $\mathcal{F}$.*

Lemma

Seja $\mathcal{F}$ uma família em κ.

- *$\mathcal{F}$ é compacta sse toda sequência em $\mathcal{F}$ possui uma subsequência que forma um Δ-sistema com raiz em $\mathcal{F}$.*
- *$\mathcal{F}$ é pré-compacta sse $\overline{\mathcal{F}}^{\subseteq} = \{s \subseteq \kappa : \exists t \in \mathcal{F},\ s \subseteq t\}$ é compacta.*

Lemma

Seja $\mathcal{F}$ uma família em κ.

- *$\mathcal{F}$ é compacta sse toda sequência em $\mathcal{F}$ possui uma subsequência que forma um Δ-sistema com raiz em $\mathcal{F}$.*
- *$\mathcal{F}$ é pré-compacta sse $\overline{\mathcal{F}}^{\subseteq} = \{s \subseteq \kappa : \exists t \in \mathcal{F},\ s \subseteq t\}$ é compacta.*
- *Se $\mathcal{F}$ é hereditária, então é compacta sse é pré-compacta.*

Lemma

Seja $\mathcal{F}$ uma família em κ.

- *$\mathcal{F}$ é compacta sse toda sequência em $\mathcal{F}$ possui uma subsequência que forma um Δ-sistema com raiz em $\mathcal{F}$.*
- *$\mathcal{F}$ é pré-compacta sse $\overline{\mathcal{F}}^{\subseteq} = \{s \subseteq \kappa : \exists t \in \mathcal{F},\ s \subseteq t\}$ é compacta.*
- *Se $\mathcal{F}$ é hereditária, então é compacta sse é pré-compacta.*
- *Se $\mathcal{F}$ é compacta, então $\mathcal{F}$ é disperso.*

Lemma

Seja $\mathcal{F}$ uma família em κ.

- *$\mathcal{F}$ é compacta sse toda sequência em $\mathcal{F}$ possui uma subsequência que forma um Δ-sistema com raiz em $\mathcal{F}$.*
- *$\mathcal{F}$ é pré-compacta sse $\overline{\mathcal{F}}^{\subseteq} = \{s \subseteq \kappa : \exists t \in \mathcal{F},\ s \subseteq t\}$ é compacta.*
- *Se $\mathcal{F}$ é hereditária, então é compacta sse é pré-compacta.*
- *Se $\mathcal{F}$ é compacta, então $\mathcal{F}$ é disperso.*

Theorem (Lopez-Abad, Todorcevic, 2013)

Seja κ um cardinal infinito. São equivalentes:

- *κ não é ω-Erdös.*
- *Existe uma família $\mathcal{F}$ hereditária, compacta e grande em κ.*

Lemma

Seja $\mathcal{F}$ uma família em κ.

- *$\mathcal{F}$ é compacta sse toda sequência em $\mathcal{F}$ possui uma subsequência que forma um Δ-sistema com raiz em $\mathcal{F}$.*
- *$\mathcal{F}$ é pré-compacta sse $\overline{\mathcal{F}}^{\subseteq} = \{s \subseteq \kappa : \exists t \in \mathcal{F},\ s \subseteq t\}$ é compacta.*
- *Se $\mathcal{F}$ é hereditária, então é compacta sse é pré-compacta.*
- *Se $\mathcal{F}$ é compacta, então $\mathcal{F}$ é disperso.*

Theorem (Lopez-Abad, Todorcevic, 2013)

Seja κ um cardinal infinito. São equivalentes:

- *κ não é ω-Erdös.*
- *Existe uma família $\mathcal{F}$ hereditária, compacta e grande em κ.*
- *Existe uma sequência fracamente nula não trivial $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ num espaço de Banach que não possui subsequências básicas subsimétricas.*

Sequências subsimétricas

Uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço de Banach X é simétrica se, para qualquer $(\lambda_i)_{i=1}^l$ e quaisquer sequências crescentes $(k_i)_{i=1}^l$ e $(n_i)_{i=1}^l$, temos que:

$$\|\sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_{k_i}\| = \|\sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_{n_i}\|.$$

Sequências subsimétricas

Uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço de Banach X é simétrica se, para qualquer $(\lambda_i)_{i=1}^l$ e quaisquer sequências crescentes $(k_i)_{i=1}^l$ e $(n_i)_{i=1}^l$, temos que:

$$\|\sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_{k_i}\| = \|\sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_{n_i}\|.$$

Uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço de Banach X é subsimétrica se existe $C \geq 1$ tal que, para qualquer $(\lambda_i)_{i=1}^l$ e quaisquer sequências crescentes $(k_i)_{i=1}^l$ e $(n_i)_{i=1}^l$, temos que:

$$(\frac{1}{C}\|\sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_{n_i}\| \leq)\|\sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_{k_i}\| \leq C\|\sum_{i=1}^{l} \lambda_i x_{n_i}\|.$$

Caso geral

Lemma (Pták, 1963)

Se $\mathcal{F}$ é uma família compacta em ω, então para todo $\varepsilon > 0$ existem $S \in [\omega]^{<\omega}$ e $(\lambda_i)_{i\in S}$ em $\mathbb{R}_+$ tais que

$$\sum_{i\in S} \lambda_i = 1 \;\; e \;\; \sum_{i\in F} \lambda_i < \varepsilon, \; se \; F \in \mathcal{F} \upharpoonright S$$

.

Caso geral

Lemma (Pták, 1963)

Se $\mathcal{F}$ é uma família compacta em ω, então para todo $\varepsilon > 0$ existem $S \in [\omega]^{<\omega}$ e $(\lambda_i)_{i \in S}$ em $\mathbb{R}_+$ tais que

$$\sum_{i \in S} \lambda_i = 1 \quad e \quad \sum_{i \in F} \lambda_i < \varepsilon, \; se \; F \in \mathcal{F} \restriction S$$

.

Theorem (Lopez-Abad, Todorcevic, 2013)

Seja κ um cardinal infinito. São equivalentes:

- *κ não é ω-Erdös.*
- *Existe uma família $\mathcal{F}$ hereditária, compacta e grande em κ.*
- *Existe uma sequência fracamente nula não trivial $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ num espaço de Banach que não possui subsequências básicas subsimétricas.*

Parte 3

Recordando as definições

Um cardinal (não-enumerável) κ é dito de ω-Erdös se toda coloração $c : [\kappa]^{<\omega} \to [2]$ possui um subconjunto homogêneo infinito.

Uma família $\mathcal{F}$ em $[\kappa]^{<\omega}$ é grande se todo conjunto infinito $X \subseteq \kappa$ possui subconjuntos finitos arbitrariamente grandes em $\mathcal{F}$.

Recordando as definições

Um cardinal (não-enumerável) κ é dito de ω-Erdös se toda coloração $c : [\kappa]^{<\omega} \to [2]$ possui um subconjunto homogêneo infinito.

Uma família $\mathcal{F}$ em $[\kappa]^{<\omega}$ é grande se todo conjunto infinito $X \subseteq \kappa$ possui subconjuntos finitos arbitrariamente grandes em $\mathcal{F}$.

Uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço de Banach X é subsimétrica se existe $C \geq 1$ tal que, para qualquer $(\lambda_i)_{i=1}^{l}$ e quaisquer sequências crescentes $(k_i)_{i=1}^{l}$ e $(n_i)_{i=1}^{l}$, temos que:

$$\left(\frac{1}{C}\left\|\sum_{i=1}^{l}\lambda_i x_{n_i}\right\| \leq\right)\left\|\sum_{i=1}^{l}\lambda_i x_{k_i}\right\| \leq C\left\|\sum_{i=1}^{l}\lambda_i x_{n_i}\right\|.$$

Resultado principal

Theorem (Lopez-Abad, Todorcevic, 2013)

Seja κ um cardinal infinito. São equivalentes:

- κ *não é* ω*-Erdös.*
- *Existe uma família* $\mathcal{F}$ *hereditária, compacta e grande em* κ*.*
- *Existe uma sequência fracamente nula não trivial* $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ *num espaço de Banach que não possui subsequências básicas subsimétricas.*

Resultado principal

Theorem (Lopez-Abad, Todorcevic, 2013)

Seja κ um cardinal infinito. São equivalentes:

- *κ não é ω-Erdös.*
- *Existe uma família $\mathcal{F}$ hereditária, compacta e grande em κ.*
- *Existe uma sequência fracamente nula não trivial $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ num espaço de Banach que não possui subsequências básicas subsimétricas.*

Lemma (Pták, 1963)

Se $\mathcal{F}$ é uma família compacta em ω, então para todo $\varepsilon > 0$ existem $S \in [\omega]^{<\omega}$ e $(\lambda_i)_{i\in S}$ em $\mathbb{R}_+$ tais que

$$\sum_{i\in S} \lambda_i = 1 \ \ e \ \ \sum_{i\in F} \lambda_i < \varepsilon, \ se \ F \in \mathcal{F} \restriction S$$

.

A última implicação

Theorem (Lopez-Abad, Todorcevic, 2013)

Seja κ um cardinal infinito. São equivalentes:

- *κ não é ω-Erdös.*
- *Existe uma família $\mathcal{F}$ hereditária, compacta e grande em κ.*
- *Existe uma sequência fracamente nula não trivial $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ num espaço de Banach que não possui subsequências básicas subsimétricas.*

Lemma

$\kappa \to (\omega)_2^{<\omega}$ *sse* $\kappa \to (\omega)_{2^\omega}^{<\omega}$.

A última implicação

Theorem (Lopez-Abad, Todorcevic, 2013)

Seja κ um cardinal infinito. São equivalentes:

- *κ não é ω-Erdös.*
- *Existe uma família $\mathcal{F}$ hereditária, compacta e grande em κ.*
- *Existe uma sequência fracamente nula não trivial $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ num espaço de Banach que não possui subsequências básicas subsimétricas.*

Lemma

$\kappa \to (\omega)_2^{<\omega}$ *sse* $\kappa \to (\omega)_{2^\omega}^{<\omega}$.

Theorem (Ketonen, 1974)

If there is $(x_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ with no subsymmetric sequence, then $\kappa \not\to (\omega)_{2^\omega}^{<\omega}$

Mais sobre espaços combinatórios

Theorem (B., Lopez-Abad, Todorcevic, 2018)

Se κ é menor que o primeiro cardinal de Mahlo, então existe um espaço de Banach reflexivo de densidade κ sem sequências subsimétricas.

Mais sobre espaços combinatórios

Theorem (B., Lopez-Abad, Todorcevic, 2018)

Se κ é menor que o primeiro cardinal de Mahlo, então existe um espaço de Banach reflexivo de densidade κ sem sequências subsimétricas.

Theorem (B., Ferenczi, Tcaciuc, 2020 - B., Piña, 2021)

Toda isometria (linear bijetora) T de um espaço combinatório $X_{\mathcal{F}}$ é da forma $T(e_n) = \pm e_{\pi(n)}$, onde π é uma bijeção de $\mathbb{N}$ tal que $\pi[\mathcal{F}] = \mathcal{F}$.

Referências principais

Jussi Antero Ketonen, *Banach spaces and large cardinals*, Fund. Math. 81 (1974), 291-303.

Jordi Lopez-Abad and Stevo Todorcevic, *Positional graphs and conditional structure of weakly null sequences*, Adv. Math. 242 (2013), 163–186.

Vlastimil Pták, *On a theorem by W. F. Eberlein*, Studia Math. **14** (1954), 276-287.

Outras referências

Christina Brech, Valentin Ferenczi and Adi Tcaciuc, *Isometries of combinatorial Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020), 4845–4854.

Christina Brech, Jordi Lopez-Abad and Stevo Todorcevic, *Homogeneous families on trees and subsymmetric basic sequences*, Adv. Math. 334 (2018), 322-388.

Christina Brech and Claribet Piña, *Banach-Stone-like results for combinatorial Banach spaces*, Ann. Pure Appl. Logic. 172 (2021).

Akihiro Kanamori, *The Higher Infinite - Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings*, Springer, 2003.

Jordi Lopez-Abad, *Large cardinals and basic sequences*, Ann. Pure Appl. Logic. 164 (2013), 1390-1417.

Muito obrigada!